

ÇALIŞMA SORULARI-5

1. Aşağıda verilen diferensiyel denklemleri, birinci mertebeden diferensiyel denklemlerin eşdeğer bir sistemine dönüştürünüz.

- $x'' - 7x' - 9x = t + 3$
- $x^{(4)} + 9x'' - 9x' + x = \sin 3t$
- $x^{(6)} + 9x^{(4)} - 9x'' + x = e^{5t}$
- $x''' + x'' - 9x' + x = e^{5t}$

2. Verilen homojen lineer sistemlerin genel çözümlerini yok etme (eliminasyon) yöntemi ile bulunuz. Eğer başlangıç koşulları verilmişse, bu başlangıç şartlarına karşılık gelen özel çözümü bulunuz.

- $x' = y; y' = -x$
- $x' = -2y, y' = 2x; x(0) = 1, y(0) = 0$
- $x' = \frac{1}{2}y, y' = -8x$
- $x' = y, y' = 6x - y; x(0) = 1, y(0) = 2$
- $x' = -y, y' = 13x + 4y; x(0) = 0, y(0) = 2$
- $x' = y, y' = -9x + 6y$
- $x' = x - y, y' = y - 4x$
- $x' + 2y = 0, x' - y' = 0$

3. Verilen matrislerin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

a. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

h. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

i. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

j. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

k. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

l. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

m. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

4. Verilen başlangıç değer problemlerini özdeğer - özvektör yöntemi ile çözünüz. (Burada, $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ve

$X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$ dir)

a. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $X' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix}$

c. $X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. Verilen sistemleri özdeğer - özvektör yöntemi ile çözünüz. (Burada, $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ve $X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$ dir)

a. $X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} X$

b. $X' = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} X$

c. $X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X$

d. $X' = \begin{bmatrix} 25 & 12 & 0 \\ -18 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 13 \end{bmatrix} X$ (Özdeğerler: $\lambda = 7, 13, 13$)

e. $X' = \begin{bmatrix} -19 & 12 & 84 \\ 0 & 5 & 0 \\ -8 & 4 & 33 \end{bmatrix} X$ (Özdeğerler: $\lambda = 9, 5, 5$)

f. $X' = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X$ (Özdeğerler: $\lambda = 2, 2, 2$)

g. $X' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} X$ (Özdeğerler: $\lambda = 1, 1, 1$)

6. Doğrulayınız ki $X_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $X_3 = \begin{bmatrix} -e^{-3t} \\ -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$ vektör fonksiyonları

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X$$

sisteminin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir çözümdür. (Not: Burada, $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ ve $X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}$ dir)